ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS **118** (2000), 109–124

SÉRIES DE POINCARÉ DES GROUPES GÉOMÉTRIQUEMENT FINIS

PAR

FRANÇOISE DAL'BO

IRMAR, Université de Rennes I, Campus de Beaulieu
35042 Rennes Cedex, France
e-mail: Francoise.Dalbo@univ-rennes1.fr

ET

JEAN-PIERRE OTAL

Ecole Normale Supérieure de Lyon, 46 Allée d'Italie
69364 Lyon Cedex 07, France
e-mail: Jean-Pierre.OTAL@umpa.ens-lyon.fr

ET

MARC PEIGNÉ*

IRMAR, Université de Rennes I, Campus de Beaulieu
35042 Rennes Cedex, France
e-mail: Marc.Peigne@univ-rennes1.fr

ABSTRACT

In this paper, we study the behaviour of the Poincaré series of a geometrically finite group Γ of isometries of a riemannian manifold X with pinched curvature, in the case when Γ contains parabolic elements. We give a sufficient condition on the parabolic subgroups of Γ in order that Γ be of divergent type. When Γ is of divergent type, we show that the Sullivan measure on the unit tangent bundle of X/Γ is finite if and only if certain series which involve only parabolic elements of Γ are convergent. We build also examples of manifolds X on which geometrically finite groups of convergent type act.

* Durant la rédaction de cet article, M. Peigné a bénéficié d'un détachement au Centre National de la Recherche Scientifique, URA 305.
Received August 6, 1998

Dans la suite, **une variété de Hadamard pincée** sera une variété Riemannienne simplement connexe, complète et à courbure pincée entre deux constantes strictement négatives $-b^2$ et $-a^2$.

Soit X une telle variété, on peut compactifier X par son **bord visuel** que l'on notera ∂X. Un groupe Γ d'isométries de X est **discret** s'il agit proprement discontinûment et librement sur X; l'action de Γ sur X se prolonge en une action par homéomorphismes sur $X \cup \partial X$. Un élément de $\Gamma - \{\mathrm{Id}\}$ est **hyperbolique** ou **parabolique** selon qu'il fixe deux points de ∂X ou un seul. Le groupe discret Γ laisse invariant l'ensemble limite $\Lambda_\Gamma \subset \partial X$, défini comme l'ensemble des points d'accumulation dans $X \cup \partial X$ d'une orbite Γx où $x \in X$. L'ensemble Λ_Γ contient un, deux ou une infinité de points: dans le premier cas, Γ est **parabolique** (tous ses éléments autres que Id sont paraboliques), dans le deuxième cas, Γ est engendré par une isométrie hyperbolique et dans le dernier cas, Γ est dit **non-élémentaire**.

Soient x et y deux points de X et s un réel positif. On définit la série de Poincaré associée à Γ par

$$P_\Gamma(x,y,s) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(x,\gamma y)}$$

où d est la distance Riemannienne sur X. Le comportement de cette série est indépendant des points x et y et on note δ_Γ son exposant critique, i.e. la borne inférieure des s tels que $P_\Gamma(x,y,s)$ est fini. On dit que Γ est **convergent** (resp. **divergent**) si $P_\Gamma(x,y,\delta_\Gamma)$ converge (resp. diverge).

Dans cet article, nous nous intéressons à la question de la convergence ou de la divergence d'un groupe Γ **géométriquement fini**, c'est-à-dire qui laisse invariant une sous-variété convexe $C(\Lambda_\Gamma) \subset X$ de codimension 0, et telle que le quotient $C(\Lambda_\Gamma)/\Gamma$ soit de volume fini. Lorsque $C(\Lambda_\Gamma)/\Gamma$ est compact (ce qui équivaut à dire que Γ ne contient pas de transformation parabolique), on sait que Γ est divergent et que son exposant critique est strictement positif dès que Γ n'est pas cyclique [Co]; plus généralement, ce résultat reste vrai si X est un espace hyperbolique au sens de Gromov.

Lorsque Γ contient des éléments paraboliques, les seuls résultats connus jusqu'à présent sur la divergence concernent les groupes agissant sur un espace symétrique de rang 1 ([S], [CI]) et certains produits libres de groupes élémentaires divergents [DP]: le groupe Γ est alors divergent. Le fait que dans ces cas là les groupes paraboliques soient eux même divergents intervient de façon essentielle pour établir ce résultat. Cette dernière propriété n'est pas toujours satisfaite dans le cas général d'une variété de Hadamard pincée, comme nous le verrons dans le paragraphe 3. Ceci nous amène à introduire la notion de **divergence locale** d'un groupe discret contenant des transformations paraboliques qui correspond à la divergence d'un sous-groupe parabolique ayant le plus grand exposant critique (cf. §1). Cette propriété permet de contrôler la divergence de Γ: en adaptant un argument du à Sullivan [S], on établit le critère de divergence suivant.

THÉORÈME A: *Soit Γ un groupe géométriquement fini contenant des transformations paraboliques. Si $\delta_\Gamma > \delta_{\mathcal{P}}$ pour tout sous-groupe parabolique $\mathcal{P}$, alors Γ est divergent. En particulier, si Γ est localement divergent, il est divergent.*

Pour démontrer ce théorème, nous considérons une mesure de Patterson, c'est-à-dire une valeur d'adhérence pour la convergence faible sur $X \cup \partial X$ de mesures portées par l'orbite Γy vue du point x. D'après [P], [S], il suffit de montrer que cette mesure de Patterson n'a pas d'atome (cf. §1). La divergence de Γ entraîne alors que cette mesure ne dépend pas de y et est l'unique valeur d'adhérence de la famille de mesures orbitales considérées; on la note σ_x.

Un procédé classique permet d'associer à σ_x une mesure μ^σ sur le fibré unitaire de X/Γ, invariante sous l'action du flot géodésique. Lorsque $C(\Lambda_\Gamma)/\Gamma$ est compact, cette mesure est finie; elle maximise l'entropie [S] et coïncide donc avec "la mesure de Bowen-Margulis". Lorsque Γ contient des transformations paraboliques, se pose de façon naturelle la question de la finitude de μ^σ. On sait par exemple que μ^σ est finie lorsque X est un espace symétrique de rang 1 ([S], [CI]) ou encore lorsque Γ est un groupe de Schottky localement divergent [DP]. Nous donnons maintenant une condition nécessaire et suffisante pour que μ^σ soit finie.

THÉORÈME B: *Soit Γ un groupe géométriquement fini, divergent et contenant des transformations paraboliques. La mesure μ^σ est finie si et seulement si, pour tout sous-groupe parabolique $\mathcal{P}$ de Γ et tout point $x \in X$ la série $\sum_{p\in\mathcal{P}} d(x,px)e^{-\delta_\Gamma d(x,px)}$ converge.*

Il découle des théorèmes A et B que si Γ est géométriquement fini et localement divergent, alors μ^σ est finie.

On peut se demander si, comme dans le cas des espaces symétriques de rang 1, la finitude géométrique d'un groupe discret Γ implique sa divergence. La réponse est négative et nous construisons dans le paragraphe §4 des groupes géométriquement finis convergents. D'après le théorème A, il nous faut d'abord donner des exemples de groupes discrets paraboliques convergents. Pour cela, nous montrerons comment évaluer la série de Poincaré d'un groupe parabolique $\mathcal{P}$ agissant sur X en fonction de la longueur de certains lacets géodésiques contenus dans les horosphères de $X/\mathcal{P}$. Ces longueurs sont plus faciles à évaluer que les quantités $d(x, py), p \in \mathcal{P}$, qui interviennent dans le terme générique de la série de Poincaré $P_{\mathcal{P}}(x, y, s)$ car leur comportement est contrôlé par une équation différentielle linéaire du 2nd ordre. En choisissant convenablement les coefficients de cette équation —ce qui revient à prescrire la courbure sectionnelle—on peut faire en sorte que $\mathcal{P}$ soit convergent (cf. §3). L'exemple $X/\mathcal{P}$ construit aura en outre la propriété d'avoir une courbure sectionnelle constante, égale à -1 dans un bout et qui tend vers -1 et toutes ses dérivées vers 0 dans l'autre bout, appelé **bout contracté**. On peut maintenant remplacer un bout cuspidal d'une variété de courbure -1 et de volume fini par le bout contracté de l'exemple $X/\mathcal{P}$ précédent; le revêtement universel Y de la variété obtenue contient alors des isométries p et h, qui vérifient les hypothèses du théorème suivant que nous démontrerons dans la paragraphe §4.

THÉORÈME C: *Soit Y une variété de Hadamard pincée dont le groupe d'isométries contient un élément parabolique p engendrant un groupe convergent et un élément hyperbolique h dont les points fixes sont différents du point fixe de p. Alors, il existe $n \geq 1$ tel que le groupe Γ engendré par h^n et p^n soit un groupe géométriquement fini convergent d'exposant $\delta_\Gamma = \delta_{\langle p \rangle}$.*

Puisque le groupe Γ fourni par ce théorème est géométriquement fini, toutes les géodésiques fermées de Y/Γ sont contenues dans un convexe $C(\Gamma)$ qui est une variété à bord de volume fini. Ce convexe est la réunion d'une variété compacte et d'une composante cuspidale (cf. [B]); cette composante est contenue dans le bout contracté de l'exemple $X/ < p >$ du paragraphe §3. Ainsi, lorsqu'on tend vers l'infini dans $C(\Gamma)$, la courbure sectionnelle tend vers -1 et toutes ses dérivées vers 0. Rappelons qu'un groupe parabolique est divergent lorsque la courbure est constante au voisinage de son point fixe; ceci suggère que la divergence d'un groupe parabolique dépend d'une façon très instable de la métrique sur la variété ambiante.

Ce travail est né d'une question de Martine Babillot concernant la dynamique des transformations paraboliques en courbure variable; nous la remercions vivement pour ses encouragements constants.

§1. Critère de divergence

La démonstration du Théorème A utilise la mesure de Patterson dont nous rappelons la construction. Soit Γ un groupe discret non-élémentaire agissant sur une variété d'Hadamard pincée X et x, y deux points de X. On peut choisir une fonction h: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, indépendante de x et y, telle que la série $g(x,y,s) = \sum e^{-sd(x,\gamma y)} h(d(x,\gamma y))$ diverge si et seulement si $s \leq \delta_\Gamma$ [P]. Lorsque Γ est divergent, on prend $h = 1$ et l'on a: $g(x,y,s) = P_\Gamma(x,y,s)$; lorsque Γ est convergent, la fonction h est "à croissance lente" c'est-à-dire qu'elle est strictement croissante et satisfait la condition suivante: pour tout $\epsilon > 0$, il existe $r_\epsilon \geq 0$ tel que:

$$\forall t \geq 0, \quad \forall r \geq r_\epsilon, \quad h(t+r) \leq e^{\epsilon t} h(r).$$

Pour $s > \delta_\Gamma$, on introduit la mesure orbitale

$$\sigma_{x,y,s} = \frac{1}{g(y,y,s)} \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(x,\gamma y)} h(d(x,\gamma y)) \epsilon_{\gamma y}$$

où $\epsilon_{\gamma y}$ désigne la masse de Dirac en γy.

Pour tous points x et y de X, il existe une suite (s_k) de $\mathbb{R}^+$ convergeant vers δ_Γ par valeurs supérieures telle que la suite de mesures (σ_{x,y,s_k}) converge faiblement vers une mesure $\sigma_{x,y}$ dont le support est Λ_Γ. On peut montrer que pour tout $x' \in X$, la suite (σ_{x',y,s_k}) converge aussi vers une mesure $\sigma_{x',y}$ absolument continue par rapport à $\sigma_{x,y}$ avec dérivée de Radon-Nikodym

$$\frac{d\sigma_{x',y}}{d\sigma_{x,y}}(\xi) = e^{-\delta_\Gamma B_\xi(x',x)}$$

où $B_\xi(x',x) = \lim_{z\to\xi}(d(x',z) - d(x,z))$ désigne la distance algébrique entre les horisphères centrées en ξ et passant respectivement par x' et x (l'inégalité triangulaire implique en particulier $|B_\xi(x',x)| \leq d(x',x)$). Les mesures $\sigma_{x,y}$, pour $x \in X$, sont appelées **mesures de Patterson** associées au point y et à la suite (s_k).

Pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout borélien $B \subset \Lambda_\Gamma$, on a:

$$\sigma_{x,y}(\gamma B) = \sigma_{\gamma^{-1}x,y}(B) = \int_B e^{-\delta_\Gamma B_\xi(\gamma^{-1}x,x)} \sigma_{x,y}(d\xi).$$

On traduit cette propriété en disant que σ est **δ_Γ-conforme pour l'action de Γ**.

Certains points de l'ensemble limite jouent un rôle particulier pour ces mesures.

Définition: Soit $\xi \in \Lambda_\Gamma$. On dit que ξ est **un point limite radial** s'il existe $x \in X$ et un sous-ensemble infini de l'orbite Γx à distance bornée du rayon géodésique $[x\xi[$. L'ensemble de ces points forme **l'ensemble limite radial**; on le note Λ_{rad}.

Rappelons que "le Lemme de l'ombre" de Sullivan entraîne d'une part qu'une mesure $\sigma_{x,y}$ n'a pas d'atomes dans Λ_{rad} et d'autre part que Γ est divergent dès que $\sigma_{x,y}(\Lambda_{rad}) > 0$ ([S], [Co]).

Dans la suite, nous nous restreindrons aux groupes géométriquement finis. On trouve dans [B] une étude précise de cette notion, nous utiliserons ici une caractérisation basée sur une description de l'ensemble limite. Rappelons que le point fixe $\xi_{\mathcal{P}}$ d'un sous-groupe parabolique maximal $\mathcal{P}$ de Γ est **un point parabolique borné** si le quotient $(\Lambda_\Gamma - \xi_{\mathcal{P}})/\mathcal{P}$ est compact (notons qu'un tel point ne peut être radial).

Définition: Le groupe Γ est **géométriquement fini** si tout point de son ensemble limite est soit radial, soit parabolique borné.

Puisqu'un groupe géométriquement fini contient à conjugaison près un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes paraboliques maximaux [B], Λ_Γ est la réunion de Λ_{rad} et d'un ensemble dénombrable de points paraboliques bornés. Par conséquent, s'il existe sur Λ_{rad} une mesure $\sigma_{x,y}$ qui ne charge pas les points paraboliques, alors $\sigma_{x,y}(\Lambda_{rad}) = \sigma(\Lambda_\Gamma) > 0$ et Γ est divergent. L'existence d'une telle mesure $\sigma_{x,y}$ est garantie par la proposition suivante.

PROPOSITION 1: *Soit Γ un groupe géométriquement fini. Si pour tout sous-groupe parabolique maximal $\mathcal{P}$ de Γ on a $\delta_\Gamma > \delta_{\mathcal{P}}$, alors il existe sur Λ_Γ une mesure de Patterson sans atome.*

Démonstration: Le groupe Γ étant géométriquement fini, son ensemble limite contient un nombre fini d'orbites $\Gamma\xi_1, \ldots, \Gamma\xi_l$ de points paraboliques bornés. D'après le Lemme de Margulis [B], il existe des horiboules $\mathcal{H}_{\xi_i}$ telles que les horiboules de la famille $\{\gamma\mathcal{H}_{\xi_i}\}_{\gamma\in\Gamma, 1\leq i\leq l}$ soient disjointes ou confondues. Fixons un point y extérieur à toutes ces horiboules et une suite (s_k) tendant vers δ_Γ par valeurs supérieures telle que (σ_{y,y,s_k}) converge vers $\sigma_{y,y}$. Nous allons construire, pour tout $i \leq l$ un point $z_i \in X$ tel que la mesure de Patterson $\sigma_{z_i,y}$ ne charge pas ξ_i ; les mesures de Patterson $\sigma_{z_i,y}$ étant absolument continues les unes par rapport aux autres, la mesure $\sigma_{z_1,y}$ ne chargera alors aucun des points ξ_i.

Notons pour simplifier ξ l'un des points $\xi_1, \ldots, \xi_l$ et $\mathcal{P}$ le stabilisateur de ξ dans Γ. Puisque ξ est un point parabolique borné, on peut choisir un domaine fondamental $\mathcal{D}_\infty$ pour l'action de $\mathcal{P}$ sur $\partial X - \{\xi\}$ tel que $\mathcal{D}_\infty \cap \Lambda_\Gamma$ soit relativement compact dans $\partial X - \{\xi\}$. Notons $\mathcal{D}$ le cône sur $\mathcal{D}_\infty$ issu de ξ. On peut choisir z suffisamment proche de ξ sur le rayon géodésique $[y, \xi[$ tel que l'intersection de l'orbite Γy avec $\mathcal{D}$ soit incluse dans un cône $\mathcal{C}$ issu de z, d'ouverture strictement inférieure à π, dirigé selon la normale extérieure à l'horiboule passant par z et centrée en ξ. On peut en outre supposer que la frontière de ce cône est de $\sigma_{y,y}$-mesure nulle. Notons $p_1, p_2, \ldots$ les éléments de $\mathcal{P}$ et Γ' l'ensemble des éléments $\gamma' \in \Gamma$ tels que $\gamma' y \in \mathcal{D}$. Soit $\mathcal{V}_n$ le complémentaire de $\bigcup_{k\leq n} p_k C$ dans $X \cup \partial X$, la famille $(\mathcal{V}_n)_n$ forme une suite décroissante de voisinages du point ξ de frontière $\sigma_{y,y}$-négligeable. On a alors, pour $s > \delta_\Gamma$:

$$\sigma_{z,y,s}(\mathcal{V}_n) \leq \frac{1}{g(y,y,s)} \sum_{k>n} \sum_{\gamma'\in\Gamma'} e^{-sd(z,p_k\gamma' y)} h(d(z, p_k\gamma' y)).$$

La convexité des horisphères et le choix de z font que l'angle au point z entre les deux segments géodésiques $[p_k z, z]$ et $[z, \gamma' y]$ est minoré par une constante strictement positive, uniformément en $k \geq 1$ et $\gamma' \in \Gamma'$. La ligne brisée réunion des deux segments géodésiques $[p_k z, z]$ et $[z, \gamma' y]$ est donc une quasi-géodésique et on a:

$$d(z, p_k \gamma' y) \geq d(z, p_k z) + d(z, \gamma' y) - C$$

où C est une constante strictement positive qui ne dépend que de la borne supérieure de la courbure. Ainsi

$$\sigma_{z,y,s}(\mathcal{V}_n) \leq \frac{e^{sC}}{g(y,y,s)} \sum_{k>n} e^{-sd(z,p_k z)} \sum_{\gamma'\in\Gamma'} e^{-sd(z,\gamma' y)} h(d(z, p_k\gamma' y)).$$

Par hypothèse, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\delta_\Gamma > \delta_{\mathcal{P}} + \epsilon$. Choisissons alors r_ϵ tel que $h(t+r) \leq e^{\epsilon t} h(r)$ pour $t \geq 0$ et $r \geq r_\epsilon$. On peut dans ce qui precède choisir z de sorte que $d(z, \Gamma' y) \geq r_\epsilon$ si bien que pour $k > n$ et $\gamma' \in \Gamma'$ on a:

$$h(d(z, p_k\gamma' y)) \leq e^{\epsilon d(z,p_k(z))} h(d(z, \gamma' y)).$$

Il vient

$$\sigma_{z,y,s}(\mathcal{V}_n) \leq e^{sC} \sigma_{z,y,s}(\mathcal{D}) \sum_{k>n} e^{(-s+\epsilon)d(z,p_k z)}.$$

En faisant tendre s vers δ_Γ le long de la sous-suite (s_k), on en déduit

$$\sigma_{z,y}\{\xi\} \leq \sigma_{z,y}(\mathcal{V}_n) \leq e^{\delta_\Gamma C} \sigma_{z,y}(\partial X) \sum_{k>n} e^{(-\delta_\Gamma+\epsilon)d(z,p_k z)}.$$

La série $\sum_{k\geq 1} e^{(-\delta_\Gamma+\epsilon)d(z,p_k z)}$ étant convergente, on obtient $\sigma_{z,y}\{\xi\} = 0$. ∎

Remarque: Le raisonnement précédent montre que $\sigma_{z,y}(\xi) = 0$ dès que Γ est géométriquement fini et divergent; l'hypothèse $\delta_\Gamma > \delta_{\mathcal{P}}$ n'est plus nécessaire en effet dans ce cas puisque la fonction h étant égale à 1, on a directement

$$\sigma_{z,y}\{\xi\} \leq e^{\delta_\Gamma C} \sigma_{z,y}(\partial X) \sum_{k>n} e^{-\delta_\Gamma d(z,p_k z)}.$$

La proposition suivante appliquée à un sous-groupe parabolique maximal de Γ fournit un critère permettant de vérifier l'hypothèse de "trou critique" $\delta_\Gamma > \delta_{\mathcal{P}}$, qui apparaissait déjà dans [DP].

PROPOSITION 2: *Soit Γ un groupe discret agissant sur une variété de Hadamard pincée X et G un sous-groupe non-trivial de Γ tel que $\Lambda_G \neq \Lambda_\Gamma$. Si G est divergent, alors $\delta_\Gamma > \delta_G$.*

Démonstration: Puisque $G \subset \Gamma$, on a $\delta_\Gamma \geq \delta_G$. L'inégalité stricte provient de la divergence du groupe G. Rappelons que G agit proprement discontinument sur l'ouvert (non-vide) $\partial X - \Lambda_G$. Soit $\mathcal{G}$ un domaine fondamental borélien pour cette action et $\sigma = \sigma_{x,y}$ une mesure de Patterson pour Γ. On a

$$\sigma(\partial X) = \sum_{g \in G} \sigma(g\mathcal{G}) + \sigma(\Lambda_G).$$

Puisque le support de σ est Λ_Γ et que $\Lambda_G \neq \Lambda_\Gamma$, on a: $\sigma(\mathcal{G}) > 0$.

L'égalité $\sigma(g\mathcal{G}) = \int_{\mathcal{G}} e^{-\delta_\Gamma B_\xi(g^{-1}x,x)} d\sigma(\xi)$ et le fait que

$$|B_\xi(g^{-1}x, x)| \leq d(g^{-1}x, x)$$

entraînent

$$\sigma(g\mathcal{G}) \geq e^{-\delta_\Gamma d(g^{-1}x,x)} \sigma(\mathcal{G}).$$

Donc

$$\sigma(\partial X) \geq \sum_{g \in G} \sigma(g\mathcal{G}) \geq \sum_{g \in G} e^{-\delta_\Gamma d(g^{-1}x,x)} \sigma(\mathcal{G}).$$

Comme G est divergent, il vient $\delta_\Gamma > \delta_G$. ∎

En particulier, lorsque Γ est un groupe non-élémentaire qui contient un sous-groupe parabolique divergent $\mathcal{P}$ on a $\delta_\Gamma > \delta_{\mathcal{P}}$. La Proposition 2 justifie la définition suivante.

Définition: Soit Γ un groupe discret agissant sur une variété de Hadamard pincée X. On dit que Γ est **localement divergent** s'il contient des transformations paraboliques et s'il existe un sous-groupe parabolique divergent de Γ dont l'exposant critique est maximal parmi les sous-groupes élémentaires de Γ.

Le Théorème A est maintenant une conséquence directe des Propositions 1 et 2.

Rappelons que le fait que $\sigma_{x,y}(\Lambda_{rad}) > 0$ entraîne l'ergodicité de l'action de Γ sur ∂X relativement à $\sigma_{x,y}$ et que dès lors, la mesure $\sigma_{x,y}$ ne dépend ni de y, ni de la suite (s_k) qui a permis de la construire [S], [Y]; nous la noterons σ_x dans la suite.

§2. Finitude de la mesure μ^σ

Rappelons le procédé de Sullivan qui permet d'associer à une mesure de Patterson σ_x une mesure sur le fibré unitaire tangent $T^1(X/\Gamma)$ invariante par le flot géodésique.

Notons $\partial X \overset{\Delta}{\times} \partial X$ l'ensemble $\partial X \times \partial X$ privé de sa diagonale. Fixons une origine $x \in X$. On peut identifier le fibré unitaire tangent $T^1 X$ au produit $\partial X \overset{\Delta}{\times} \partial X \times \mathbb{R}$ en associant à un élément $(y, v) \in T^1 X$ le triplet (ξ^-, ξ^+, r) où ξ^- et ξ^+ sont les extrémités de la géodésique orientée déterminée par (y, v) et $r = B_{\xi^+}(y, x)$. Dans ces coordonnées, l'action d'une isométrie γ de Γ est donnée par

$$\gamma(\xi^-, \xi^+, r) = (\gamma\xi^-, \gamma\xi^+, r + B_{\xi^+}(x, \gamma^{-1}x))$$

tandis que le flot géodésique $(\tilde{g}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ agit sur $T^1 X$ par

$$\tilde{g}_t(\xi^-, \xi^+, r) = (\xi^-, \xi^+, r - t).$$

Pour tout $(\xi^-, \xi^+) \in \partial X \overset{\Delta}{\times} \partial X$, la quantité $\frac{1}{2}(B_{\xi^-}(x, y) + B_{\xi^+}(x, y))$ ne dépend pas du point y sur la géodésique $(\xi^- \xi^+)$; on la note $(\xi^- | \xi^+)_x$.

Puisque σ_x est δ_Γ-conforme, la mesure $e^{2\delta_\Gamma(\xi^-|\xi^+)_x}\sigma_x(d\xi^-)\sigma_x(d\xi^+)$ est une mesure Γ-invariante sur $\partial X \overset{\Delta}{\times} \partial X$ et ne dépend pas de x: c'est le courant géodésique c^σ associé à $\sigma = (\sigma_x)$. La mesure $\tilde{\mu}^\sigma = c^\sigma \otimes dt$ est invariante sous les actions de Γ et du flot géodésique $(\tilde{g}_t)$; son support est $\Lambda_\Gamma \overset{\Delta}{\times} \Lambda_\Gamma \times \mathbb{R}$. Elle induit donc par passage au quotient une mesure μ^σ, invariante sous l'action du flot géodésique (g_t) sur $T^1(X/\Gamma)$ et dont le support est $(\Lambda_\Gamma \overset{\Delta}{\times} \Lambda_\Gamma \times \mathbb{R})/\Gamma$.

Lorsque Γ est cocompact ou convexe cocompact, $(\Lambda_\Gamma \overset{\Delta}{\times} \Lambda_\Gamma \times \mathbb{R})/\Gamma$ est compact; μ^σ est alors finie, c'est la mesure d'entropie maximale ([S],[K], [Y]). Lorsque Γ est géométriquement fini, divergent, et contient des transformations paraboliques, on peut d'abord se poser la question de la finitude de μ^σ (remarquons que si Γ est convergent, σ_x charge uniquement les points paraboliques et la mesure μ^σ est clairement de masse infinie).

Démonstration du Théorème B: La projection sur X du support de $\tilde{\mu}^\sigma$ est contenue dans $C(\Lambda_\Gamma)$. Le groupe Γ étant géométriquement fini, le quotient $C(\Lambda_\Gamma)/\Gamma$ se décompose en la réunion disjointe d'un compact C_0 et d'une famille finie $C_1, \ldots, C_l$ de "bouts cuspidaux": pour $i \geq 1$, chaque C_i est isométrique au quotient de l'intersection de $C(\Lambda_\Gamma)$ et d'une horiboule $\mathcal{H}_{\xi_i}$ par un groupe parabolique $\mathcal{P}_i$. Choisissons un domaine fondamental borélien $\mathcal{C}_i$ pour l'action de Γ sur la préimage de C_i dans X. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\mathcal{C}_0$ est relativement compact et que, pour $i \geq 1$, $\mathcal{C}_i$ est un domaine fondamental pour l'action de $\mathcal{P}_i$ sur $\mathcal{H}_{\xi_i} \cap C(\Lambda_\Gamma)$.

On a:

$$\mu^\sigma(T^1(X/\Gamma)) = \sum_{i=0}^{l} \tilde{\mu}^\sigma(T^1\mathcal{C}_i) = \sum_{i=0}^{l} \int_{\partial X \overset{\Delta}{\times} \partial X} c^\sigma(d\xi^- d\xi^+) \int_{(\xi^-\xi^+)\cap\mathcal{C}_i} dt.$$

Fixons un point $x \in \mathcal{C}_0$. Puisque $\mathcal{C}_0$ est relativement compact, on a, pour toute géodésique $(\xi^-\xi^+)$ rencontrant $\mathcal{C}_0$: $0 \leq (\xi^-|\xi^+)_x \leq D$ où D est le diamètre de $\mathcal{C}_0$. Par conséquent, $\tilde{\mu}^\sigma(T^1\mathcal{C}_0) \leq \sigma_x(\partial X)^2 De^{2\delta_\Gamma D}$.

Ainsi, la mesure μ^σ est finie si et seulement si $\tilde{\mu}^\sigma(T^1\mathcal{C}_i)$ est fini pour $i = 1, \ldots, l$. Notons pour simplifier $\mathcal{C}$ l'un des domaines fondamentaux $\mathcal{C}_i$, $\mathcal{P}$ le groupe parabolique et ξ le point parabolique correspondants. Puisque Γ est géométriquement fini, on peut choisir un domaine fondamental borélien $\mathcal{D}_\infty$ pour l'action de $\mathcal{P}$ sur $\partial X - \{\xi\}$ tel que $\mathcal{D}_\infty \cap \Lambda_\Gamma$ soit relativement compact dans $\partial X - \{\xi\}$. Le groupe Γ étant divergent, on a $\sigma_x\{\xi\} = 0$ et donc

$$\tilde{\mu}^\sigma(T^1\mathcal{C}) = \sum_{p,q\in\mathcal{P}} \int_{p\mathcal{D}_\infty \times q\mathcal{D}_\infty} c^\sigma(d\xi^- d\xi^+) \int_{(\xi^-\xi^+)\cap\mathcal{C}} dt.$$

En utilisant le fait que c^σ est invariante sous l'action de Γ, on obtient:

$$\tilde{\mu}^\sigma(T^1\mathcal{C}) = \sum_{p,q\in\mathcal{P}} \int_{\mathcal{D}_\infty \times p^{-1}q\mathcal{D}_\infty} c^\sigma(d\eta^- d\eta^+) \int_{(\eta^-\eta^+)\cap p^{-1}\mathcal{C}} dt.$$

Puisque $\mathcal{C}$ est un domaine fondamental pour l'action de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{H}_\xi \cap C(\Lambda_\Gamma)$, on a donc:

$$\mu^\sigma(T^1\mathcal{C}) = \sum_{p\in\mathcal{P}} \int_{\mathcal{D}_\infty \times p\mathcal{D}_\infty} c^\sigma(d\eta^- d\eta^+) \int_{(\eta^-\eta^+)\cap\mathcal{H}_\xi} dt.$$

D'un point de vue géométrique, toute géodésique $(\eta^-\eta^+)$ qui passe par $\mathcal{H}_\xi$ se projette sur M en une géodésique qui fait une incursion dans la région cuspidale C et le terme $\int_{(\eta^-\eta^+)\cap\mathcal{H}_\xi} dt$ correspond à la longueur de cette incursion. Comme $\mathcal{D}_\infty \cap \Lambda_\Gamma$ est relativement compact dans $\partial X - \{\xi\}$, il existe un compact K de X contenant x tel que pour toute géodésique $(\eta^-\eta^+)$ issue de $\mathcal{D}_\infty \cap \Lambda_\Gamma$ et rencontrant $\mathcal{H}_\xi$, le premier point d'intersection de $(\eta^-\eta^+) \cap \mathcal{H}_\xi$ appartienne à K; une telle géodésique vérifie donc $0 \leq (\eta^-|\eta^+)_x \leq \operatorname{diam} K$. Si de plus $\eta^+ \in p\mathcal{D}_\infty \cap \Lambda_\Gamma$, la géodésique $(\eta^+\eta^-)$ passe par $p(K)$ et la différence $|\int_{(\eta^-\eta^+)\cap\mathcal{H}_\xi} dt - d(x,px)|$ est donc majorée par $2\operatorname{diam} K$. Finalement il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\frac{1}{C} \sum_{p\in\mathcal{P}} \sigma_x(p\mathcal{D}_\infty)(d(x,px) - C) \leq \mu^\sigma(T^1\mathcal{C}) \leq C \sum_{p\in\mathcal{P}} \sigma_x(p\mathcal{D}_\infty)(d(x,px) + C).$$

Puisque σ_x est δ_Γ-conforme, $\sigma_x(p\mathcal{D}_\infty) = \int_{\mathcal{D}_\infty} e^{-\delta_\Gamma B_\eta(p^{-1}x,x)}\sigma_x(d\eta)$. Comme $\mathcal{D}_\infty \cap \Lambda_\Gamma$ est relativement compact dans $\partial X - \{\xi\}$ il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\eta \in \mathcal{D}_\infty \cap \Lambda_\Gamma$ et pour tous les $p \in \mathcal{P}$ sauf peut-être un nombre fini, l'angle au point x entre les segments géodésiques $[x, p^{-1}x]$ et $[x,\eta)$ soit supérieur à ϵ ; le terme $\sigma_x(p\mathcal{D}_\infty)$ est donc équivalent à $e^{-\delta_\Gamma d(x,px)}$, uniformément en $p \in \mathcal{P}$. Ceci termine la démonstration. ∎

COROLLAIRE 3: *Soit Γ un groupe géométriquement fini tel que $\delta_\Gamma > \delta_{\mathcal{P}}$ pour tout sous-groupe parabolique $\mathcal{P}$. Alors, la mesure μ^σ est finie.*

Ce résultat est une conséquence directe du Théorème B.

§3. Groupes paraboliques d'isométries des variétés de Hadamard

Considérons d'abord le cas de l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^r$, identifié au demi-espace supérieur. Soit p une isométrie parabolique fixant le point ∞; la transformation p induit alors sur $\mathbb{R}^{r-1} = \partial\mathbb{H}^r - \{\infty\}$ une isométrie euclidienne et, par un calcul élémentaire, on trouve que la suite $(d(0,p^n 0) - 2\log n)_{n\geq 1}$ converge. L'exposant critique du groupe $\langle p\rangle$ est donc $1/2$ et le groupe est divergent. Si maintenant $\mathcal{P}$ est un groupe d'isométries paraboliques de $\mathbb{H}^r$, il contient, d'après l'un des théorèmes de Bieberbach, un sous-groupe abélien de rang k, d'indice fini et agissant par translations sur un sous-espace $\mathbb{R}^k$. On montre alors que la série de Poincaré de $\mathcal{P}$ est de même nature que la série $\sum 1/(n_1+n_2+\cdots+n_k)^{2s}$; l'exposant critique de $\mathcal{P}$ est donc $k/2$ et $\mathcal{P}$ est divergent.

Ce résultat se généralise aux espaces symétriques de rang 1 que l'on note ici $K\mathbb{H}^r$, avec $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$. En effet, soit $\mathcal{P}$ un groupe parabolique d'isométries agissant sur $K\mathbb{H}^r$; quitte à extraire un sous-groupe d'indice fini, $\mathcal{P}$ peut être représenté comme un réseau co-compact d'un groupe linéaire nilpotent simplement connexe N. Si $Z(N)$ désigne le centre de N, posons $l = \dim(Z(N)\cap \operatorname{Im} K)$ et $k = \dim(N/Z(N)\cap \operatorname{Im} K)$; l'exposant critique de $\mathcal{P}$ est $(2l+k)/2$ et $\mathcal{P}$ est divergent [CI].

De façon générale, lorsque $\mathcal{P}$ est un groupe parabolique, abélien de rang k agissant sur une variété de Hadamard pincée, son exposant critique est supérieur à $ka/2$, où $-a^2$ est la borne supérieure de la courbure sur X; néanmoins, le groupe $\mathcal{P}$ peut être convergent et nous allons en donner des exemples. Nous établissons tout d'abord un lemme qui nous permettra d'étudier la nature de la série de Poincaré d'un groupe parabolique.

Soit $\mathcal{P}$ un groupe discret d'isométries paraboliques agissant sur X. Notons ξ le point fixe de $\mathcal{P}$ et choisissons un point de référence $o \in X$. Soit $t \to$

$c(t)$ un paramétrage par longueurs d'arcs du rayon géodésique $[0, \xi[$; notons $\mathcal{H}_t$ l'horisphère centrée en ξ et passant par $c(t)$. Pour tout $p \in \mathcal{P}$, on note $l_p(t)$ la distance géodésique, pour la métrique Riemannienne induite sur $\mathcal{H}_t$, entre les points $c(t)$ et $p(c(t))$; la fonction $t \to l_p(t)$ est strictement décroissante et tend vers 0 exponentiellement vite quand t tend vers $+\infty$. Définissons t_p comme l'instant où $l_p(t_p) = 1$ si $l_p(0) \geq 1$, et par $t_p = 0$ si $l_p(0) < 1$ (ce qui ne peut se produire que pour un nombre fini de $p \in \mathcal{P}$, puisque $\mathcal{P}$ est discret). Le lemme suivant relie la distance $d(o, po)$ à t_p.

LEMME 4: *Les séries* $\sum_{p\in\mathcal{P}} e^{-sd(o,po)}$ *et* $\sum_{p\in\mathcal{P}} e^{-2st_p}$ *sont de même nature.*

Démonstration: Nous utiliserons le fait que si deux points d'une horisphère $\mathcal{H}$ de X sont à distance horisphérique 1, leur distance pour la métrique ambiante est supérieure à une constante strictement positive dépendant uniquement de la borne inférieure sur la courbure de X [HH, Th 4.6]. Désignons maintenant par $\mathcal{P}'$ l'ensemble des éléments $p \in \mathcal{P}$ tels que $t(p) \geq 1$. Considérons le chemin réunion des segments géodésiques $[o, c(t_p)]$, $[c(t_p), p(c(t_p))]$ et $[p(c(t_p)), p(o)]$. Par la convexité des horisphères, les angles de ce chemin aux sommets $c(t_p)$ et $p(c(t_p))$ sont supérieurs à $\pi/2$. D'autre part, pour $p \in \mathcal{P}'$, la longueur de ces trois segments géodésiques est minorée par une constante strictement positive indépendante de p. Le théorème de comparaison de Topogonov entraîne alors que la quantité $|d(o, p(o)) - 2t_p|$ est bornée indépendamment de p. Le lemme en résulte puisque $\mathcal{P} - \mathcal{P}'$ est fini. ∎

Nous allons maintenant construire une variété de Hadamard pincée Y de dimension r, sur laquelle tout groupe de Bieberbach de rang $r-1$ agit comme groupe parabolique convergent. Pour cela, posons $Y = \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{R}$ et munissons Y d'une métrique Riemannienne de la forme $g = T^2(t)dx_{euc}^2 + dt^2$, où dx_{euc}^2 est une métrique euclidienne fixée sur $\mathbb{R}^{r-1}$, et T une fonction C^∞ strictement positive. Le groupe des isométries de g contient les isométries euclidiennes de $\mathbb{R}^{r-1}$ et en particulier tous les groupes de Bieberbach de rang $r-1$. La courbure sectionnelle au point (x, t) est indépendante de x: dans un plan contenant le vecteur $\partial/\partial t$, elle vaut $K(t) = -T''(t)/T(t)$ et dans un plan horizontal, elle vaut $-K^2(t)$. Pour que Y soit une variété de Hadamard pincée, il suffit que K soit bornée entre deux constantes strictement négatives. Remarquons que pour $T(\log s) = 1/s$ on obtient un modèle de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^r$.

Supposons que T vérifie, pour s assez grand, $T(\log s + 2\log\log s) = 1/s$. Alors, en posant $u(s) = \log s + 2\log\log s$, la relation $T(u(s)) = 1/s$ entraîne:

$$K(u(s)) = -\frac{T''(u(s))}{T(u(s))} = -\frac{2su'(s) + s^2u''(s)}{s^3(u'(s))^3}.$$

On en déduit que $\lim_{s\to\infty} K(u(s)) = -1$. En fait $K(s)$ tend vers -1 et toutes ses dérivées vers 0 lorsque $s \to +\infty$.

Considérons une translation p sur $\mathbb{R}^{r-1} \times \{0\}$ de distance euclidienne de translation 1. Les droites euclidiennes étant des géodésiques pour la métrique induite sur les horisphères, on a: $t_{p^n} = T^{-1}(1/|n|)$. Donc, pour $|n|$ assez grand, $t_{p^n} = \log|n| + 2\log\log|n|$. Ainsile groupe cyclique engendré par p a $1/2$ comme exposant critique et est convergent. Plus généralement, si $\mathcal{P}$ est un groupe de Bieberbach contenant un sous-groupe abélien d'indice fini de rang k, le groupe $\mathcal{P}$ est convergent d'exposant $k/2$.

Soulignons que le choix précédent de T ne prescrit la courbure que sur un voisinage $\mathbb{R}^{r-1} \times [\beta, +\infty[$. On peut en particulier imposer à la courbure de Y d'être constante égale à -1 dans $\mathbb{R}^{r-1} \times]-\infty, \alpha]$, pour tout α fixé à l'avance. Il suffit de choisir T tel que $T(\log s) = 1/s$ pour $0 < s \leq e^\alpha$ et $T(\log s + 2\log\log s) = 1/s$ pour $s \geq \beta$ où β est un réel positif suffisamment grand; on choisit β tel que $T'(\alpha) < T'(\beta)$, afin que l'interpolation entre les restrictions imposées sur $]-\infty, \alpha]$ et $[\beta, +\infty[$ puisse être réalisée par une fonction convexe aussi régulière qu'on le souhaite.

§4. Construction de groupes géométriquement finis non-élémentaires convergents

Soit Γ un groupe discret de covolume fini mais non cocompact agissant sur $\mathbb{H}^r$. Chaque bout $\mathcal{N}$ de $\mathbb{H}^r/\Gamma$ est isométrique au quotient d'une horiboule de $\mathbb{H}^r$ par un groupe de Bieberbach $\pi_1(\mathcal{N})$ de rang $r-1$. Ce groupe agit aussi isométriquement sur $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{R}$ muni de la métrique g du §3 ; pour cette métrique g le groupe $\pi_1(\mathcal{N})$ est convergent. On peut alors recoller le quotient $(\mathbb{R}^{r-1} \times [\beta, +\infty[)/\Gamma$ avec $\mathbb{H}^r/\Gamma - \mathcal{N}$; on obtient une variété de Hadamard pincée Y sur laquelle Γ agit isométriquement.

Démonstration du Théorème C: Fixons un point o sur l'axe de h. Quitte à remplacer h et p par des puissances, on peut trouver des compacts $\mathcal{U}_p$ et $\mathcal{U}_h$, voisinages respectifs dans $Y \cup \partial Y$ du point fixe de p et des points fixes de h, tels que:

(1) $\mathcal{U}_p \cap \mathcal{U}_h = \emptyset$ et $o \notin (\mathcal{U}_p \cup \mathcal{U}_h)$;
(2) $h^k(\partial X - \mathcal{U}_h) \subset \mathcal{U}_h$, $p^k(\partial X - \mathcal{U}_p) \subset \mathcal{U}_p$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$;
(3) $\mathcal{U}_p$ et $\mathcal{U}_h$ sont vus depuis o sous un angle minoré par une constante strictement positive.

Le groupe Γ engendré par p et h est un groupe libre; tout élément $\gamma \in \Gamma$ différent de Id s'écrit de façon unique comme un produit $\omega_1^{n_1} \cdots \omega_k^{n_k}$, avec $\omega_i \in \{p, h\}$,

$\omega_i \neq \omega_{i+1}$, $n_i \in \mathbb{Z}^*$ et on a: $\gamma(X \cup \partial X - (\mathcal{U}_p \cup \mathcal{U}_h)) \subset \mathcal{U}_{\omega_1}$. D'après (3), si $x \in \mathcal{U}_h$ et $y \in \mathcal{U}_h$, le chemin égal à la réunion des segments géodésiques $[x, o]$ et $[o, y]$ est une quasi-géodésique. Il existe donc une constante $C > 0$, indépendante de x et de y, telle que $d(x,y) \geq d(o,x) + d(o,y) - C$. Par conséquent, la propriété (2) entraîne

$$d(o, h^{n_1}p^{m_2}\cdots h^{n_k}p^{m_k}o) \geq \sum_{1\leq i\leq k} d(o, h^{n_i}o) + \sum_{1\leq i\leq k} d(o, p^{m_i}o) - 2kC. \tag{4}$$

Puisque l'exposant critique du groupe cyclique $< h >$ est nul, la série de Poincaré $P_\Gamma(o, o, \delta_{\langle p\rangle})$ est de même nature que la série

$$P'_\Gamma(s) = \sum_{k\geq 1}\sum_{n_i, m_i\in\mathbb{Z}^*} e^{-sd(o,h^{n_1}p^{m_2}\cdots h^{n_k}p^{m_k}o)}$$

en $s = \delta_{\langle p\rangle}$. D'après (4),

$$P'_\Gamma(s) \leq \sum_{k\geq 1}(e^{2sC}\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} e^{-sd(o,h^n o)}\sum_{m\in\mathbb{Z}^*} e^{-sd(o,p^m o)})^k$$

que l'on majore par

$$\sum_{k\geq 1}(2e^{2sC}\frac{e^{-sl(h)}}{1-e^{-sl(h)}}\sum_{m\in\mathbb{Z}^*} e^{-sd(o,p^m o)})^k.$$

Quitte à remplacer h par une puissance h^n, on peut supposer que

$$2e^{2\delta_{\langle p\rangle}C}\frac{e^{-\delta_{\langle p\rangle}l(h)}}{1-e^{-\delta_{\langle p\rangle}l(h)}}\sum_{m\in\mathbb{Z}^*} e^{-\delta_{\langle p\rangle}d(o,p^m o)} < 1.$$

L'exposant critique de Γ est donc inférieur à $\delta_{\langle p\rangle}$ et on a $P_\Gamma(o, o, \delta_{\langle p\rangle}) < +\infty$. Comme $\langle p\rangle \subset \Gamma$, on a aussi $\delta_{\langle p\rangle} \leq \delta_\Gamma$. Finalement, Γ est convergent d'exposant $\delta_{\langle p\rangle}$.

Pour montrer que Γ est géométriquement fini, il nous faut d'abord montrer que tout point $\xi \in \Lambda_\Gamma$ qui n'est fixé par aucune transformation parabolique est radial. Pour cela, nous utilisons une définition des points radiaux due à B. Bowditch ([B, Prop. 5-2-1]), équivalente à celle donnée dans le §1: le point ξ est radial si et seulement s'il existe une suite (γ_k) de Γ telle que pour tout point $\eta \in \Lambda_\Gamma - \{\xi\}$ la suite $((\gamma_k(\eta), \gamma_k(\xi)))$ reste dans un compact de $\Lambda_\Gamma \overset{\vartriangle}{\times} \Lambda_\Gamma$. Lorsque ξ est le point fixe attractif d'une isométrie hyperbolique $\gamma \in \Gamma$, il suffit de poser $\gamma_k = \gamma^{-k}$ pour tout $k \geq 1$. Sinon, il existe une unique suite $(\omega_i^{n_i})_{i\geq 1}$

avec $\omega_i \in \{p,h\}, n_i \in \mathbb{Z}^*$ et $\omega_{i+1} \neq \omega_i$ telle que $\xi = \lim_{k\to+\infty} \omega_1^{n_1} \cdots \omega_k^{n_k}(o)$; on pose alors $\gamma_k = \omega_k^{-n_k} \cdots \omega_1^{-n_1}$. Par la propriété de ping-pong, d'une part $\gamma_k\xi \in U_{\omega_{k+1}}$ et d'autre part, pour tout $\eta \in \Lambda_\Gamma - \{\xi\}$, $\gamma_k\eta$ appartient à U_{ω_k} pour k assez grand. La condition $\omega_k \neq \omega_{k+1}$ et le fait que les ensembles U_h et U_p soient disjoints permettent de conclure.

Montrons enfin que les points paraboliques de Λ_Γ sont bornés. Ceci résulte encore de la dynamique de ping-pong : les sous-groupes paraboliques maximaux de Γ sont en effet tous conjugués au groupe cyclique engendré par p et les translatés par p des compacts $\Lambda_\Gamma \cap \mathcal{U}_h$ sont disjoints et recouvrent $\Lambda_\Gamma - \{\xi\}$. ∎

Remarque: De même, on peut obtenir un groupe géométriquement fini vérifiant la propriété de trou critique sans être localement divergent. Dans la construction précédente, il suffit de remplacer le groupe hyperbolique $< h >$ par un groupe purement loxodromique, non élémentaire et d'exposant strictement supérieur à 1/2.

Références

[B] B. H. Bowditch, *Geometrical finiteness with variable négative curvature,* Duke Mathematical Journal **77** (1995), 229–274.

[CI] K. Corlette and A. Iozzi, *Limit sets of isometry groups of exotic hyperbolic spaces,* Transactions of the American Mathematical Society **351** (1999), 1507–1530.

[Co] M. Coornaert, *Mesures de Patterson-Sullivan sur le bord d'un espace hyperbolique au sens de Gromov,* Pacific Journal of Mathematics **159** (1993), 241–270.

[DP] F. Dal'bo and M. Peigné, *Some negatively curved manifolds with cusps, mixing and counting,* Journal für die Reine und Angewandte Mathematik **497** (1998), 141–169.

[HH] E. Heinze and H. C. Im Hof, *Geometry of horospheres,* Journal of Differential Geometry **12** (1977), 481–491.

[K] V. Kaimanovitch, *Ergodicity of harmonic invariant measures for the geodesic flow on hyperbolic spaces,* Journal für die Reine und Angewandte Mathematik **455** (1994), 57–103.

[P] S. J. Patterson, *The limit set of a Fuchsian group,* Acta Mathematica **136** (1976), 241–273.

[S] D. Sullivan, *Entropy, Hausdorff measures old and new and limit set of geometrically finite Kleinian groups,* Acta Mathematica **153** (1984), 259–277.

[Y] C. Yue, *The ergodic theory of discrete groups on manifolds of variable negative curvature,* Transactions of the American Mathematical Society **348** (1996), 4965–5006.